

Teoretická část

1. (a) Napište definice primitivní funkce a neurčitého integrálu (2 body).
(b) Zformulujte a dokažte větu o per partes pro neurčitý integrál (3 body).
(c) Uveďte příklad funkce definované na $(-1, 1)$, která není primitivní funkcí k žádné funkci na $(-1, 1)$, uveďte příklad nespojitě funkce na $\mathbb{R}$, která má primitivní funkci na $\mathbb{R}$. Zdůvodněte (3 body).
2. (a) Napište definici Taylorova polynomu (2 body).
(b) Zformulujte věty o Peanově tvaru zbytku a Lagrangeově tvaru zbytku Taylorova polynomu (3 body).
(c) Nechť f a g mají v bodě a Taylorův polynom 2. stupně. Má Taylorův polynom 2. stupně i funkce fg ? Pokud ano, jaký má tvar? Tvrzení dokažte (3 body).
3. (a) Napište definici derivace funkce v bodě a definici rostoucí funkce (2 body).
(b) Zformulujte a dokažte větu o vztahu monotonie a derivace (stačí dokázat jeden případ) (3 body).
(c) Existuje funkce f rostoucí na $\mathbb{R}$, pro kterou platí $f'(0) = 0$? Existuje spojitá rostoucí funkce na $\mathbb{R}$, pro kterou platí, že f' je spojitá na $\mathbb{R}$ a $f'(q) = 0$ pro všechna $q \in \mathbb{Q}$? Tvrzení řádně zdůvodněte (3 body).